

LP 22 - Phenomenes de diffusion

Niveau L2

Prerequis

- * Description microscopique de la matiere (Agitation thermique)
- * Resolution d'equa diff
- * Utilisation du gradient
- * Notation complexe.
- * Regime permanent / Transitoire

Bibliographie

- * 1001 Q P. Garing

Experience: Diffusion Ammoniac $\Rightarrow$ Modelisation du temps
Barre de cuivre chauffée $\Rightarrow$ mesure de λ .

Introduction Pédagogique

- * Ce cours se place au niveau licence 2 car il demande un bagage scientifique important, puisque les notions abordées ne sont pas évidentes
- * Ce cours se place dans une thème sur les transferts thermiques, c'est le premier cours de ce thème, il sera suivi par des cours sur la notion de flux et de résistance thermique, puis sur le rayonnement et la convection, pour finir par établir des bilans.
- * Dans ce cours j'ai fait le choix de parler à la fois de diffusion thermique et de particules et de faire les démonstrations pour les particules car le phénomène est plus intuitif.
- * On fera ensuite une analogie pour retrouver les mêmes lois avec la diffusion thermique.
- * Dans ce cours on va établir les équations de diffusion et on les résoudra par des cas classiques afin de donner des exemples d'applications aux élèves
- * Pour pouvoir expliquer le phénomène il faudra que les élèves soient familiers avec la description microscopique de la matière, et l'agitation thermique
- * Pour les applications on aura besoin que les élèves maîtrisent la résolution d'équation différentielle et la notation complexe.
- * Dans ce cours on va introduire plusieurs grandeurs que les élèves ne connaissent pas, on prendra donc le temps de donner leurs unités et ce qu'elles représentent physiquement.
- * Les difficultés dans ce cours sont de bien comprendre le phénomène de diffusion ainsi que le développement mathématique.
- * On tâchera de faire les calculs pas à pas et de bien détailler le départ du calcul
- * Pour aider l'élève à appréhender le phénomène on prendra des exemples, des illustrations ainsi que des expériences pour illustrer le phénomène
- * TD sur des bilans de système avec création et consommation de particules + marche aléatoire
- * TP pour faire des mesures de coeff de diffusion
- * Etude de doc

Introduction

- * Au Lycée vous avez parlé de transfert thermique, vous avez vu qu'il en existait 3 différents
 - Conduction et diffusion 
 - Convection
 - Rayonnement
- * Aujourd'hui on ne va parler que de diffusion, et il faut savoir qu'il y a de la diffusion dans plusieurs domaines.
- * Si je met quelques gouttes de sirop dans l'eau, au début elle sont au fond puis elle finit par diffuser et on a quelque chose d'homogène.
- * C'est aussi pour ça qu'on sent l'odeur d'un parfum quand on ouvre la bouteille.
- * Mais c'est aussi un phénomène de diffusion quand vous attrapez une cuillère dans l'eau bouillante.

Objectif : Comprendre le phénomène de diffusion et savoir établir les équations de diffusion.

Transition : Comment se déroule la polarisation ?

I - La diffusion

A - Mise en évidence

- * La diffusion c'est un déplacement de matière ou un transfert d'énergie sans mouvement d'ensemble
- * Dans ce cours on va parler de diffusion de particule et de diffusion thermique
- * Dans le cas des particules on a déplacement de matière et dans la diffusion thermique on a transport d'énergie
- * Les deux phénomènes sont similaires, il faut juste bien faire la différence dans les deux cas.
- * Par la diffusion de particule on peut le mettre en évidence avec cette expérience
 - ↳ Exp ammoniac @ papier pH. 
- * Dans ce cas ce sont les particules d'ammoniac qui diffusent. Elle ont toutes un mouvement microscopique, ou elle se cognent les uns les autres, elle avancent lentement.
 - ↳ Animation
- * La diffusion thermique a une origine similaire, mais si on se place dans un solide les molécules ne vont pas bouger. mais elle vont se transmettre de l'agitation thermique en s'entrechoquant
 - ↳ Vidéo  @ photo

Transition: On a mis en évidence qu'on avait diffusion de particules ou thermique, mais en physique on va chercher à modéliser ces phénomènes.

B. Relation de continuité

* Pour modéliser ce phénomène on va se placer dans le cas de la diffusion de particule à 1D, et par analogie on aura les mêmes lois par la diffusion thermique.

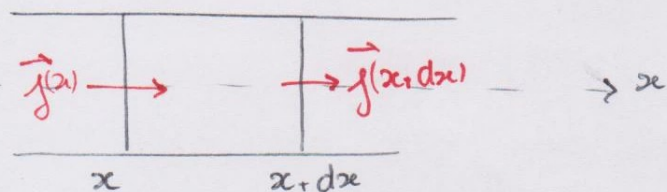
* On commence par définir un vecteur densité volumique de courant de particule $\vec{j}$ en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

↳ il représente le nombre de particules qui traversent une surface pendant un temps t

* Pour fixer les notations on va noter N le nombre de particules

n le " " par unité de volume.

* On va faire un bilan de particules sur une tranche d'épaisseur dx



Nbre particule qui entre
 $\vec{j} = j \vec{e}_x$ $\vec{S} = S \vec{e}_x$

* Variation = Entree - Sortie $\Leftrightarrow N(x; t+dt) - N(x; t) = \vec{j}(x; t) \cdot \vec{S} dt - \vec{j}(x+dx; t) \vec{S} dt$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial N}{\partial t} dt = - \frac{\partial j}{\partial x} S dt dx \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$$

* C'est une équation de conservation de la matière : la variation du nombre de particule est égale aux particules entrant et sortant.

* En faisant le même bilan par la diffusion thermique on obtient

$$\boxed{\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_q}{\partial x} = 0}$$

le j_q vient du premier principe de la thermodynamique
 j_q : densité volumique de courant thermique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

Transition On a réussi à obtenir les équations de conservation, mais pour l'instant on ne connaît pas le vecteur densité de courant, nous ce qu'on cherche c'est l'évolution des particules dans le milieu.

C. Equation de diffusion

* Pour exprimer les densité de courant, il existe deux lois phénoménologiques

⇒ Loi de Fick: $\vec{j} = -D \vec{\text{grad}}(n)$: D la diffusivité en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (proje)

Loi de Fourier: $\vec{j}_a = -\lambda \vec{\text{grad}}(T)$: λ la conductivité thermique en $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ (proje)

* Maintenant on peut réinjecter cette expression dans la précédente.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (-D \cdot \partial n / \partial x)}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$$

↳ c'est l'équation de diffusion : On peut noter qu'elle est irréversible

* On peut faire de même avec la diffusion thermique: $D_{th} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

avec $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$: la diffusivité thermique : en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

* On peut déjà faire un raisonnement qualitatif avant d'essayer de la résoudre

↳ ordre de grandeur:

* En thermique: $D_{th} \cdot \frac{\Delta T}{L^2} - \frac{\Delta T}{\tau} = 0 \Rightarrow D_{th} = \frac{L^2}{\tau} = \frac{\lambda}{\rho c}$

↳ On peut le calculer par le cuivre et voir si on a la bonne forme par le temps?

* Expérience: calcul λ_{cu} et modélisation $\tau = f(L^2)$.

* L'expérience est cohérente avec le modèle

Transition : Cette équation est compliquée à résoudre dans le cas général, on va essayer de la résoudre par des cas particuliers.

II. Resolution de l'equation

A. Regime permanent

* Si on regarde la barre de cuivre, au bout d'un certain temps les T° n'évoluent plus : $\partial T / \partial t = 0$: regime permanent.

* Est ce qu'on va pouvoir retrouver le même profil ?

$$* \text{Dth } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = a \quad \Rightarrow \quad T(x) = ax + b$$

* On regarde les conditions initiales

$$T(x=0) = T_0 = b$$

$$T(x=L) = T_e = aL + T_0$$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{T_e - T_0}{L} \cdot x + T_0$$

* Si on trace l'évolution de la température en fonction de x :

↳ projection Exp $\Rightarrow$ Ok. 

* On peut définir le flux thermique : la puissance qui traverse une surface

$$\hookrightarrow \phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S}$$

$$= \iint j_{th} \cdot d^2S = \iint -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} d^2S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S \approx -\lambda \frac{\Delta T}{L} S$$

$\Rightarrow$ On peut définir la résistance thermique : $R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{L}{\lambda S}$ en $K \cdot W^{-1}$

$\Rightarrow$ permet de caractériser la résistance d'un matériau, au transfert thermique

↳ utile pour isolation

Transition : On n'est pas toujours dans un cas permanent, par exemple par une maison la température extérieure change.

B. Régime Harmonique

- * On va modéliser la température extérieur qui varie en $A \cos(\omega t) + T_m$
- * Je vais regarder la diffusion de la température dans le sol, pour connaître celle de ma cave:

$$T(x,t) = T_m + \Theta(x,t)$$

- * On passe en représentation complexe pour faciliter la résolution

$$\underline{\Theta}(x,t) = \Theta_0(x) e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow D_{th} \cdot \frac{\partial^2 \underline{\Theta}}{\partial x^2} - \frac{\partial \underline{\Theta}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{th} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2} - j\omega \Theta_0 = 0$$

On résout l'équa. diff: $r^2 = \frac{j\omega}{D_{th}} \Rightarrow r = \pm \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{\omega}{D_{th}}} = \pm \left(\frac{1+i}{\delta} \right)$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2 D_{th}}{\omega}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c \omega}}$: homogène à une longueur.

$$\Rightarrow \Theta_0(x) = a \cdot \cancel{e^{x/\delta}}^{\text{diverge}} e^{ix/\delta} + b e^{-x/\delta} e^{-ix/\delta} \quad ; \quad \text{en } x=0, A=b$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x,t) = T_m + A e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta)}$$

* Par la Terre: $\rho = 3,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $c = 870 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ $\lambda = 1,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$$\Rightarrow \delta = 2,5 \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi/T$$

- * Quand on se met à 5m de profondeur si on prend $T_m = 10^\circ\text{C}$.

↳ Graphique

- * On obtient des très faibles variations de températures, isolées par une cave

Conclusion: On a vu le pourquoi et la diffusion, comment on peut la modéliser et on a ainsi établi l'équation de diffusion qu'on peut résoudre dans 2 cas particuliers.